REPUBLIQUE GABONAISE | **2009 – MATHEMATIQUES**
DIRECTION DU BACCALAUREAT | **Séries : C – E**

Durée : 4 heures
Coefficient : 5

Exercice 1

Soit S l'application du plan dans lui – même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$

1. Donner l'expression complexe de S. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S.
2. O étant l'origine du repère, on considère la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   On pose : $f = R \circ S$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f après avoir donné son écriture complexe.
   b) Quelle est l'image par f du point d'affixe -3 ?
3. Soit g l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
   $$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{z} - i)$$
   a) Donner l'expression complexe de $h = g \circ S$.
   b) Quelle est la nature de h ? Montrer que h est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Exercice 2

Partie A

On considère l'équation (E) : $17x - 28y = 1$ avec $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Expliquer pourquoi cette équation admet au moins un couple solution d'entiers relatifs.
2. Trouver une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Partie B

1. a) Déterminer l'ensemble R des restes de la division euclidienne d'un entier naturel par 29.
   b) Expliquer pourquoi 29 est un nombre premier.

2. On rappelle que si p est un entier naturel premier et x un entier naturel non multiple de p, alors on a : $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
   Démontrer alors en utilisant le résultat précédent que pour tout entier naturel x non nul et non multiple de 29 et pour tout entier naturel n tel que $n \equiv 1\ [28]$, alors on a : $x^n \equiv x\ [29]$.

3. Soit $x \in R$. On désigne par :
   - $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29.
   - $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

   a) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de $f(x)$.
   b) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de $g(x)$.

4. Déduire du 2. de la partie B que $x^{85} \equiv x\ [29]$ pour tout x élément de R.
5. Déterminer le sens de $g(f(x))$.
6. Sachant que pour tout élément x de R on a : $x^{17} \equiv f(x)\ [29]$, démontrer alors que $(f(x))^5 \equiv x\ [29]$.
   En déduire $g(f(x))$.

Partie C

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	13	12	9	5	3
$f(x)$					

Problème

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = (x-1)(e^{2x}+1)$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (2x-1)e^{2x}$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. (on ne calculera pas les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition)
2. Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout réel x, $g(x) \geq 0$.

Partie B : Représentation graphique de la fonction f. Calcul d'aire. Récurrence.

1. a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
2. a) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
   b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$. En déduire le sens de variation de f, puis dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Tracer avec soin sur le même graphique : la droite $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f et la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de f^{-1} la fonction réciproque de f.
6. Soit λ un réel strictement inférieur à 1. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \lambda$.
   a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ.
   b) Déterminer $\mathcal{A}$ la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.
7. $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f.
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $f^{(n)}(x) = 2^{n-1}(2x+n-2)e^{2x}$, $\ x \in \mathbb{R}$.
   b) Déterminer un triplet (α, β, γ) de nombres réels non tous nuls tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\alpha f^{(n+2)}(x) + \beta f^{(n+1)}(x) + \gamma f^{(n)}(x) = 0.$$
8. Montrer que, pour tout nombre réel x : $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 4x - 8$.

Partie C : Equations différentielles

On se propose dans cette partie, de déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, et vérifiant, pour tout nombre réel x, $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 4x - 8$.
On désigne par $(\mathcal{F})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et vérifiant, pour tout nombre réel x, $\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 4\varphi(x) = 0$.

1. Montrer que $(\mathcal{E})$ est non vide.
2. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P(x) = ax + b$ soit un élément de $(\mathcal{E})$.
3. Soit f_0 un élément de $(\mathcal{E})$. Etablir que f est un élément de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\varphi = f - f_0$ est élément de $(\mathcal{F})$.
4. Déterminer tous les réels α tels que $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ soit solution de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c'est – à – dire φ soit solution de $(\mathcal{F})$).
5. a) Démontrer que, si g appartient à $(\mathcal{F})$ alors l'application h définie dans $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-2x}g(x)$, est deux fois dérivable et, pour tout nombre réel x, $h''(x) = 0$.
   b) Réciproquement, démontrer que, si l'application h définie dans $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-2x}g(x)$ est deux fois dérivable, et si pour tout nombre x, $h''(x) = 0$, alors l'application g est élément de $(\mathcal{F})$.
   c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$.
   d) En déduire enfin la solution générale de l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 4x - 8$ (c'est – à – dire l'ensemble $(\mathcal{E})$).