

Exercice 1 : (7 points)

Soit $(f_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ la suite de fonctions définies sur $[0; \pi/2]$ par :
$$\begin{cases} f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

1°) Vérifier que f_n est continue en 0.

2°) Etudier la continuité de f_n ; puis justifier l'existence de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt.$$

3°) On définit pour $n \in \mathbb{N}$;
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt.$$

On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$

$(I_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ désigne la suite définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt.$

a) Démontrer, pour tout entier n , que :

$$I_{n+2} - I_n = \frac{2}{n+1} \sin(n+1) \frac{\pi}{2}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $I_{2n+1} - I_{2n-1} = 0.$

c) Calculer $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) dt$; puis en déduire la valeur de $I_{2n+1}.$

4°) On rappelle que pour tout entier naturel k on a :

$$\sin(2k-1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}.$$

a) Prouver à partir de 3°) a) que : $I_{2n} - I_{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \times (-1)^{n+1}.$

b) Démontrer que alors que :

$$I_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

5°) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_{2n+1} - I_{2n}) = 0.$ En déduire la limite de la suite $(I_{2n})_{(n \in \mathbb{N})}.$

Exercice 2 : (6 points)

Le plan (\mathcal{P}) est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (Γ) désigne l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que : $x^2 - y^2 = 1.$

1°) a) Quelle est la nature exacte de (Γ) ? Donner les éléments caractéristiques de (Γ) : centre, asymptotes et sommets.

b) Représenter graphiquement (Γ) dans (\mathcal{P}) .

2°) On désigne par (Γ_1) la partie de (Γ) formés des points qui ont une abscisse strictement positive.

- Démontrer que si $M(x; y)$ appartient à (Γ_1) ; alors $x \geq 1$.
- Soit $M(x; y)$ démontrer que si $M(x; y)$ appartient à (Γ_1) alors on a :

$$x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \text{ et } x - \sqrt{x^2 - 1} > 0.$$
- En déduire que si $M(x; y) \in (\Gamma_1)$ alors : $x + y > 0$ et $x - y > 0$
- Démontrer que si $M(x; y) \in (\Gamma_1)$ alors il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}$.
- Inversement, démontrer que s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}$ alors

$$M(x; y) \in (\Gamma_1).$$

- Déterminer alors une représentation paramétrique de (Γ_1) .

3°) Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$. Donner l'écriture complexe de f , préciser sa nature exacte ainsi que ses éléments caractéristiques.

4°) On pose $(\Gamma_2) = f((\Gamma_1))$.

Déterminer une équation cartésienne, puis représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct (Γ_2) .

Exercice 3 : (7 points)

Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques 1cm sur $(O; \vec{i})$ et 5cm sur $(O; \vec{j})$. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$g_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{1+x^2} = \frac{\ln^n x}{1+x^2}; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de g_n .

1°) En tenant compte de la parité de n , calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g_n(x)$.

2°) Pour tout $x > 0$ et en posant $x = e^t$, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{1 + e^{2t}}. \text{ En déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x).$$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* , g_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $g'_n(x)$.

$$\text{b) On pose pour tout } x > 0 : \varphi_n(x) = n \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 \ln x.$$

$$\text{Montrer que pour tout } x > 0 : g'_n(x) = \frac{x(\ln x)^{n-1}}{(1+x^2)^2} \varphi_n(x).$$

c) Etudier les variations de φ_n sur $]0; +\infty[$. Calculer les limites de φ_n aux bornes de $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations complet.

d) Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$ notée α_n .

Vérifier que : $\alpha_n \in]e^{n/2}; e^n[$. En déduire le signe de φ_n sur $]0; +\infty[$.

- 4°) Dédurre de la question précédente les variations de g_n . On donnera le tableau de variation de g_n suivant la parité de n .
- 5°) Etudier la position relative des courbes (C_{n+1}) et (C_n) suivant la parité de n
- 6°) a) Soit α_1 l'unique solution sur $]0 ; +\infty [$ de l'équation $\varphi_1(x) = 0$.
Vérifier que $\alpha_1 \in [3/2 ; 2]$, puis donner un encadrement de α_1 d'amplitude 10^{-2} .
- b) Vérifier que $\alpha_2 \in [3 ; 3,1]$, puis donner un encadrement de α_2 d'amplitude 10^{-2} .
On admet que $\alpha_3 \in]4,78 ; 4,79[$.
- 7°) Représenter (C_1) , (C_2) et (C_3) sur le même graphique.

www.tamba1mpsi.com