REPUBLIQUE GABONAISE

DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session: 2017
Séries: C et SI (E)
Coef.: 5
Durée: 4 heures

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL
SESSION 2017

MATHEMATIQUES
(L'usage de la calculatrice est autorisé)

Exercice 1 : QCM (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des sous-questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Le choix d'une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Recopie sur ta feuille de composition la bonne réponse en indiquant : le numéro de la question, et les deux propositions choisis. Exemple : 1) a_1 et b_3

1) On donne l'équation différentielle $(E_1): y''+2y'+y=x+1$
   a) Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y''+2y'+y=0$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
   a_1 : $x \mapsto (Ax+B)e^{-x}$ avec $(A;B)\in\mathbb{R}^2$; a_2 : $x\mapsto Ae^{-x}+Be^{x}$ avec $(A;B)\in\mathbb{R}^2$
   a_3 : $x\mapsto e^{-x}[A\cos(x)+B\sin(x)]$ avec $(A;B)\in\mathbb{R}^2$; a_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste.
   b) Une solution de l'équation (E_1) est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et :

   b_1 : $x\mapsto(x+1)e^{-x}+x-1$; b_2 : $x\mapsto e^{-x}+e^{x}+x+1$; b_3 : $x\mapsto e^{-x}[\cos(x)+\sin(x)]+x-1$;
   b_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

2) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. $A(3;-2;1)$, $B(-1;2;-1)$ et $M(x;y;z)$ trois points de l'espace.
   a) La norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :

   a_1 : $\|\overrightarrow{AB}\|=2\sqrt{2}$; a_2 : $\|\overrightarrow{AB}\|=4$; a_3 : $\|\overrightarrow{AB}\|=6$; a_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste

   b) L'ensemble Γ des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|=12$ est :

   b_1 : $\Gamma=\emptyset$; b_2 : Γ est le cercle de diamètre $[AB]$; b_3 : Γ est le cylindre d'axe (AB) et de rayon 2 ; b_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste.

3) Soit A et B deux points du plan, $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ et $r'\left(B;\frac{5\pi}{3}\right)$ deux rotations.
   a) L'application du plan dans lui-même $f=ror'$ est :

   a_1 : une rotation ; a_2 : une translation ; a_3 : une symétrie orthogonale ; a_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste

   b) L'ensemble Ψ des points invariants par f est :

www.tamba...pci.com

b_1 : $\Psi = \emptyset$; b_2 : Ψ est un singleton ; b_3 : Ψ est la droite (AB) ; b_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste

4) Soit $(u)_n$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

   a) $(u)_n$ est une suite :

   a_1 : Constante ; a_2 : Décroissante ; a_3 : Croissante ; a_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste

   b) $(u)_n$ est une suite qui :

   b_1 : converge vers -1 ; b_2 : diverge ; b_3 : Converge vers 4 ; b_4 : Aucune des réponses précédentes n'est juste

Exercice 2 : Arithmétique (4 points)

Soient a, b et x trois nombres entiers non nuls avec $a = \overline{x432}^5$ et $b = \overline{11}^5$.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $a \equiv 0[b]$.
2) Déterminer l'expression de a et b dans la base décimale.
3) Démontrer que : $PGCD(a;b) = PGCD(5x+3;6)$.
4) a) Donner l'ensemble des diviseurs de 6
   c) Pour quelles valeurs de x, les nombres a et b sont-ils premiers ?

Exercice 3 : Equation dans $\mathbb{C}$ et similitude directe plane (5 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Equation dans $\mathbb{C}$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 - (3+3i)z^2 + (-6+4i)z + 10 - 14i = 0$

1) Démontrer que le nombre complexe $z_1 = 1 - i$ est une solution de (E).
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2+4i)z - 12 + 2i = 0$
3) a) Développer l'expression $P(z) = (z - 1 + i)[z^2 - (2+4i)z - 12 + 2i]$
   b) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On donne les points A, B et M d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_M = 1 - i$.

1) Placer les points A, B et M dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.
2) a) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_A - z_M}{z_B - z_M}$.
   b) En déduire la nature du triangle AMB.
3) Soit f une transformation du plan dans le plan vérifiant : $f(A) = A$ et $f(M) = M'$ où M' est le centre de gravité du triangle de sens direct AMB.
   a) Déterminer l'affixe du point M'
   b) Démontrer que pour $M \neq A$, $\cos(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{AM'}{AM} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

www.tambou1mpsi.com

Exercice 4 : Etude d'une famille de fonction (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude de fonction

n est un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{(\ln x)^n}{x}$. On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$ d'unité graphique $2cm$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$. Puis donner une interprétation graphique du résultat. (on discutera suivant la parité de n).

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x)$. Puis donner une interprétation graphique du résultat.

2) a) Calculer $f_n'(x)$ où f_n' désigne la dérivée de la fonction f_n et montrer que $f_n'(x)$ est du signe de $(n-\ln x)(\ln x)^{n-1}$ pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$.

   b) Etudier le signe $f_n'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n sur $]0\,;+\infty[$. (on discutera suivant la parité de n).

3) Démontrer que pour n non nul, les courbes (C_n) se coupent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées. ($x_A < x_B$)

4) Tracer dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$ les courbes (C_1) et (C_2)

Partie B : calcul d'intégrale

www.tamba1mpsi.com

Pour $n\geq 1$,on pose : $u_0=1$ $u_n=\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$

1) Calculer : $u_n=\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$

2) On pose $S_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)^2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$

   a) Calculer : S_1 et S_2

   b) Démontrer par récurrence que :

   Pour tout $n\geq 1$, $\dfrac{\pi^2}{6}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)<\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{\pi^2}{6}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)$

   c) Etudier la convergence de la suite (S_n) et préciser sa limite.